Propuesta de Taller

ELEMENTOS PARA EL ESTUDIO DE LOS PROCESOS DE DEMOSTRACIÓN EN CLASES DE MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA

Carolina Morales Quirós
Liceo Laboratorio Emma Gamboa
carolinamoralesquiros@yahoo.es

Andrea Araya Chacón
Universidad de Costa Rica
andrea.araya@emate.ucr.ac.cr

RESUMEN
Este taller pretende ofrecer un espacio de discusión para identificar y analizar el rol que podría tener el estudio de las demostraciones en secundaria. Busca además, que los participantes generen elementos de estrategias didácticas, para construir argumentos sobre proposiciones que deban estudiarse en secundaria.

PALABRAS CLAVES: argumentos, demostración, niveles de demostración, demostración en secundaria.

OBJETIVO GENERAL: Identificar y analizar algunas condiciones necesarias para fomentar en Secundaria diferentes "niveles de demostración" matemática; así como proponer estrategias para la adquisición de habilidades características de cada nivel.

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

1. Definir la noción de "demostración en secundaria".
2. Introducir las nociones de teorema, axioma y demostración; ilustrando además la estructura de un razonamiento deductivo y la construcción de argumentos lógicos.
3. Determinar qué tipo de argumentos pueden ser aceptados en Secundaria como una demostración.
4. Exponer una tipología de posibles niveles de demostración, que buscan evidenciar la evolución de los argumentos de los estudiantes.
5. Diseñar estrategias didácticas que fomenten la construcción de argumentos y la necesidad de su producción

El taller que sugerimos está estructurado en tres momentos. El **primer momento** está dedicado a una breve presentación del taller: por qué proponer este taller, de dónde surgió la inquietud, expectativas de los participantes y aportes que podría ofrecer la actividad. Seguido de un breve plenario sobre qué entendemos los profesores de matemática y estudiantes de secundaria, y en qué contextos, por "demostración" y "demostrar". Durante este momento, se discutirán también aspectos como:

a. ¿Es necesario o importante argumentar? ¿Es necesario o importante argumentar en una clase de matemáticas?
b. ¿Qué “formas” se pueden identificar en una clase de matemáticas para garantizar la veracidad de una afirmación?
c. ¿Se propicia la demostración o argumentación en secundaria? Si la respuesta es afirmativa, ¿de qué forma se promueve? Si la respuesta es negativa, ¿por qué no se incentiva?
d. ¿Qué debería aprender un estudiante de secundaria, relacionado con la demostración?, ¿cómo podría aprenderlo?

A partir de la plenaria, se espera llegar a un consenso con respecto a la noción y a la función de una demostración: *“algo” que convenza a otros de la veracidad de una afirmación* (Miyazaki, 2000; Larios, 2000). En este sentido, la demostración admite ser estructurada en términos de niveles (Miyazaki, 2000; NCTM, 2000, Ibáñez & Ortega, 2001; Fortiny & Jiménez, 2001, Gutiérrez, 2004, Bernardi & Moriera, 2008), que no sólo dependen del contenido matemático que involucra, o de los sistemas de representación al alcance de los actores; sino que está también asociada al referente de las personas que las demandan y que las ofrecen: ¿qué las convence de la veracidad de una proposición?

Concluimos este primer momento del taller con una actividad lúdica llamada “El acertijo de MU[1]” (Gómez, 1993; Gómez & Gómez, 1997), mediante la cual se busca evidenciar “la forma” de un sistema formal, axiomático, utilizado para la construcción del conocimiento matemático.

Acertijo de MU

Este *acertijo* es un juego de transformación de palabras que sólo están compuestas por las letras M, U e I. Es decir, “palabra” es sencillamente una sucesión de letras, que no tiene porqué tener significado (por ejemplo, MMUIU, MI, MUMI, IUMU, U). El juego tiene cinco reglas:

1.Toda palabra se puede triplicar

[1] Según Gómez (1993), “la idea del acertijo de MU aparece en el libro de Douglas B. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Goleen Brain*. Londres: Penguin Books, 1979” (p. 24).

2.Una U se puede reemplazar por II
3.Cuatro Ies seguidas se puedes eliminar
4.Después de una M se puede insertar una U
5.Si en una palabra aparece IMU puede quitarse la M

El objetivo del juego es transformar una palabra en otra utilizando únicamente las reglas mencionadas. Así, por ejemplo, si se parte de MI se puede llegar a MMI aplicando la siguiente sucesión de reglas:

$$\text{MI} \rightarrow^{1} \text{MIMIMI} \rightarrow^{4} \text{MIMUIMI} \rightarrow^{5} \text{MIUIMI} \rightarrow^{2} \text{MIIIIMI} \rightarrow^{3} \text{MMI}$$

De una manera lúdica e intuitiva (reglas que 'debemos de respetar' al jugar), el acertijo de MU permite introducir las nociones de teorema, axioma y demostración; ilustrando además la estructura de un razonamiento deductivo y la construcción de argumentos lógicos[2]. Ahora bien, como ya lo hemos indicado, los procesos de demostración dependen del contenido matemático, los sistemas de representación y los referentes de los actores con respecto a los razonamientos que les convencen sobre la veracidad de una afirmación (Miyazaki, 2000). En este sentido, los argumentos deductivos son centrales en los procesos de demostración, pero deben de articularse con otros tipos de razonamientos que favorecen la construcción de conjeturas (razonamiento inductivo, analógico, hipotético; MEP, 2000; Ayala, 2006). Durante el **segundo momento** del taller, abordamos de manera introductoria una tipología de niveles de demostración construida a partir de la experiencia de las proponentes y de una revisión bibliográfica realizada sobre el tema. Así, iniciamos este momento presentando a los participantes, quienes están distribuidos en grupos, algunos ejemplos de demostraciones (en sentido amplio) en matemáticas, relacionadas con los temas abordados en nuestra secundaria. La actividad consiste en discutir e indicar si los argumentos presentados pueden ser aceptados como una demostración, para cuáles estudiantes podría ser una demostración, qué referente o dominio de lenguaje matemático debería de tener el estudiante para el cual el argumento

[2] Coincidiendo con Nicholls y Dogramaci (1999, en Ayala, 2006), un argumento lógico (deductivo), "es aquel cuyas *premisas* (afirmaciones) apoyan una conclusión de forma contundente" (p. 66).

presentado es una demostración, qué y cómo podríamos fomentar lo indicado en el punto anterior en los estudiantes de nuestra secundaria, cómo generar la necesidad de demostrar o argumentar en clase de matemáticas, qué demandaría a los profesores y a los estudiantes la presencia de tal necesidad. Luego de una puesta en común sobre las respuestas a estas preguntas, las proponentes del taller presentarán una tipología de posibles niveles de demostración, que buscan evidenciar la evolución de los argumentos que los estudiantes pueden construir.

Posibles niveles de demostración

La tipología construida integra las contribuciones que varios autores han realizado en el tema de "niveles de demostración" (Ibañez y Ortega, 2001; Balacheff, 1987; Miyazaki, 2000; Gutiérrez, 2004). Proponemos cuatro niveles caracterizados principalmente por el tipo de razonamiento que apoya el argumento construido y el lenguaje que se emplea: convicción externa, convicción empírica-inductiva, convicción deductiva-informal, convicción deductiva-formal y convicción analítica-formal.

I. Convicción externa
    a. Autoritarios: libros de texto, profesor, alumno aventajado.
    b. Simbólicos: evidencias de figuras
II. Convicción empírica-inductiva:
    a. Ingenua: una afirmación se verifica en uno o más ejemplos, los cuales son elegidos sin ningún criterio, de manera aleatoria.
    b. Experimental: los ejemplos son elegidos mediante un criterio, buscan un ejemplo "característico" pues se reconoce la imposibilidad de verificar en todos.
    c. Genérica: el estudiante ya no usa valores numéricos concretos, sino que busca propiedades abstractas generales para hacer la demostración, se limita a escribir la figura pero no usa las propiedades matemáticas necesarias, los ejemplos forman parte de la demostración.
III. Convicción deductiva-informal: organizada a partir de ejemplos concretos, se pueden suprimir los ejemplos que acompañan a la demostración sin que ésta pierda información o deje de ser comprensible. Los estudiantes son capaces de entender una demostración realizada por el profesor pero incapaces de realizarlas por ellos mismos.

IV. Convicción deductiva-formal: demostraciones deductivas formales aceptadas por los matemáticos profesionales.

V. Convicción analítico-formal: procesos asociados con el análisis de la estructura de un sistema axiomático y las relaciones lógicas entre los sistemas axiomáticos y sus componentes.

Exponer esta tipología tiene como objetivo articular la propuesta con los aportes de los participantes, para determinar niveles de demostración que los profesores consideren "probables de alcanzar" con sus alumnos.

El **tercer** y último **momento** del taller tiene como fin aplicar la tipología acordada en el momento anterior, para diseñar estrategias didácticas que fomenten la construcción de argumentos y la necesidad de su producción. Con este propósito, los participantes identificarán en libros de texto de 7°, 8°, 9°, 10° y 11° algunos contenidos del programa de estudio, para los cuales los alumnos podrían acceder a algún tipo de demostración o justificación de los resultados relacionados con esos contenidos. Una vez identificados los contenidos, se propondrá a los participantes diseñar las líneas generales de posibles estrategias didácticas, que fomenten la argumentación matemática y su necesidad en el aula. Finalmente, se expondrán y discutirán las propuestas diseñadas por los participantes y otras sugeridas por las autoras del taller. Este tercer momento culmina con el cierre del taller, durante el cuál se propone discutir sobre la viabilidad y necesidad[3] de abordar las demostraciones, o en general la construcción de argumentos en secundaria.

Bibliografía

Ayala, M. (2006). *Tipos de razonamiento y su aplicación estratégica en el aula*. México: Trillas.

Bernardi, S. & Moriera, S. (2008). *Un entorno favorable a la demostración*. Universidad de Humanidades y Ciencias, Argentina. Consultado el 24 junio 2008, en www.icme11.org/system/files/**Bernardis**Moriena.doc

Fortuny, J & Jiménez, J (2001). Razonamientos geométricos de alto nivel y actividades predemostrativas con alumnos y alumnas de 12-16 años, *Uno: razonamientos y pruebas*, 28, 20-38.

[3] Por ejemplo, los estudiantes no ven la necesidad de hacer demostraciones pues ven una afirmación obvia. O porque una cláusula del contrato didáctico establecido en la mayoría de nuestras aulas establece que el hecho que el profesor afirme como cierta una proposición – o tan solo que la mencione – es un criterio suficiente para la veracidad de la misma.

Gómez, P. (1993). *Matemática Básica*. Colombia: Una empresa docente.

Gómez, P. & Gómez, C. (1997). *Sistemas formales, informalmente*. Colombia: Una empresa docente.

Gutiérrez, A. (2004). Aprendizaje de la demostración matemática en enseñanza secundaria. *Memorias XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética*, Carlos Luque (compilador). Universidad Pedagógica Nacional. Consultado el 24 de junio de 2008 en http://encuentrogeometria.org/dmdocuments/encuentro_15/33.pdf

Ibáñez, M. & Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en el alumnado de primer curso de bachillerato, *Uno: razonamientos y pruebas*, 28, 39-59.

Larios, V. (2000). *Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Estudio sobre un papel en los procesos relacionados con en educación matemática*. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Querétano. Consultado, 24 de junio de 2008 en http://www.geocities.com/discendi2/tm/tm.html

MEP (2005). *Programas de Estudio de Matemáticas*, ciclo diversificado. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 1(20), 41-51.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. USA